Une ED du 2nd ordre "Vicelarde"

Soit $y''+2y'+2y = 2e^{-t}\cos t \quad (E)$

① EQUATION HOMOGÈNE

$$y''+2y'+2y=0 \quad (E_0)$$

Equation caractéristique associée :

$$r^2+2r+2r=0 \quad (EC)$$

$$\Delta = 2^2-4\times 2\times 1 = -4 = (2i)^2$$

Comme Δ admet $2i$ pour racine carrée, les solutions de (EC) sont

$$r = \frac{-2+2i}{2} = -1+i \quad \text{et} \quad \bar{r} = -\frac{2-2i}{2} = -1-i$$

De ce fait, les solutions de l'équation homogène sont toutes les fonctions

$$\boxed{g : t \mapsto e^{-t}(A\cos t + B\sin t)}$$

② SOLUTION PARTICULIÈRE

On va la chercher sous la forme

$$y_0(t) = A(t)f(t) + B(t)g(t)$$

où $f(t) = e^{-t}\cos t$ & $g(t) = e^{-t}\sin t$ sont les 2 fonctions qui engendrent les solutions de l'équation homogène

$$y_0' = A'f + Af' + B'g + Bg'$$

$$y_0'' = A''f + 2A'f' + Af'' + B''g + 2B'g' + Bg''$$

De ce fait, $y_0''+2y_0'+2y_0$

$$= A''f + A'(2f'+2f) + A(f''+2f'+2f)$$
$$+ B''g + B'(2g'+2g) + B(g''+2g'+2g)$$

Déjà $f''+2f'+2f = g''+2g'+2g = 0$ puisque f et g solutions de (E_0). Ouf !

Ensuite $\quad f = e^{-t}\cos t$

donc $\quad f' = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$

soit $\quad 2f'+2f = -2e^{-t}\sin t$

De même $\quad g = e^{-t}\sin t$ et $g' = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$

donc $\quad 2g'+2g = 2e^{-t}\cos t$

Par conséquent $\quad y_0''+2y_0'+2y_0$

$$= A''e^{-t}\cos t - 2A'e^{-t}\sin t$$
$$+ B''e^{-t}\sin t + 2B'e^{-t}\cos t$$
$$= e^{-t}\left[(A''+2B')\cos t + (B''-2A')\sin t\right]$$

donc y_0 est une solution de (E)

ssi $\begin{cases} A''+2B' = 2 \\ B''-2A' = 0 \end{cases} \quad (S)$

Cela fonctionne avec $A'=0$ et $B'=1$ puisqu'alors $A''=B''=0$

Il suffit donc de prendre $A(t)=0$ et $B(t)=t$ c'est-à-dire

$$\boxed{y_0 : t \mapsto te^{-t}\sin(t)}$$

③ CONCLUSION

Les solutions de l'équation différentielle sont toutes les fonctions de la forme

$$\boxed{y : t \mapsto e^{-t}\left(A\cos t + (B+t)\sin t\right) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

REM : avec un système (S) plus dur à résoudre "au pif", on peut intégrer une des relations pour obtenir B' en fonction de A ce qui donne une tion entre A'' et A (par exemple)

Mais LE MIEUX EST L'ENNEMI DU BIEN !
En cherchant à s'inspirer de la Variation de la Constante, on se complique la vie ... faisons simple.

② SOLUTION PARTICULIÈRE

On va la rechercher sous la forme
$y_0(t) = P(t)e^{-t}$, de sorte que
$y_0'(t) = P'(t)e^{-t} - P(t)e^{-t}$ puis
$y_0''(t) = P''(t)e^{-t} - 2P'(t)e^{-t} + P(t)e^{-t}$

Par conséquent, $y_0'' + 2y_0' + 2y_0$
$= e^{-t}(P'' - 2P' + P + 2P' - 2P + 2P)$
$= e^{-t}(P'' + P)$

De ce fait y_0 solution de (E) <u>ssi</u>
$P'' + P = 2\cos t$

On recherche P sous la forme
$P(t) = At\cos t + Bt\sin t$
$P'(t) = A\cos t - At\sin t + B\sin t + Bt\cos t$
$P''(t) = -2A\sin t - At\cos t + 2B\cos t - Bt\sin t$

Par conséquent,
$P'' + P = 2B\cos t - 2A\sin t$
de sorte que y_0 est solut° de (E) <u>ssi</u>
$\begin{cases} 2B = 2 \\ -2A = 0 \end{cases}$ soit $A = 0$ et $B = 1$

Ainsi $\boxed{y_0 : t \mapsto t\sin t\, e^{-t}}$

<u>MORALITÉ</u> ne pas hésiter à procéder par étapes !